Кондратюк Наталія
Науковий керівник – Дідківська Т.В.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ І КВАДРАТНІ МАТРИЦІ

У курсі вивчення алгебри вагоме місце займають такі питання, як матриці другого порядку та числа Фібоначчі.

Числова послідовність: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, в якій, при будь-якому $n>2$ $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ називається числами Фібоначчі (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…). [2] Дана послідовність утворилася в одній досить тривіальній задачі з “Книги про абак”: “Скільки пар кроликів в один рік від однієї пари народжується?”

Числа Фібоначчі мають цілий ряд цікавих і важливих властивостей, частину з яких можна довести, використовуючи алгебру квадратних матриць. А саме, використовуючи властивості додавання і множення матриць, піднесення до степеня, знаходження оберненої матриці. Дане застосування матриць другого порядку є досить актуальним, оскільки ця проблема не є повністю вивченою, тим самим викликає інтерес багатьох математиків.

Властивості чисел Фібоначчі:

1) Доведемо, що $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$***, де*** u_n***- числа Фібоначчі*** [1]. Для доведення використаємо матричну рівність $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$, для довільного натурального n, де A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, яка доводиться методом математичної індукції.

Оскільки det A= det $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$=-1 і детермінант добутку матриць дорівнює добутку співмножників, то $\det A^n = (\det A)^n = (-1)^n$. Крім того

$$\det A^n = \det\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} = u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2,$$ маємо $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$.

2) Для чисел розширеної послідовності Фібоначчі виконується рівність $u_{-n} = (-1)^{n+1}u_n$, $n \in N$ [1].

Поширивши рівність (характеристична властивість послідовності Фібоначчі) $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ на цілі від’ємні значення n, можна продовжити послідовність чисел (u_n) у від’ємному напрямку: … 13, -8, 5, -3, 2,-1, +1, 0, 1, 1, 2, 3, 5 ...

Тут $u_{-n} = u_{-n+2} - u_{-n+1}$, де n- довільне натуральне число.

Числа Фібоначчі з натуральними індексами можна діставати за допомогою матриці A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Аналогічно доводиться, що числа Фібоначчі з цілими від'ємними індексами утворюємо множенням на себе матриці

A^{-1}=$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а саме: $(A^{-1})^n = \begin{pmatrix} u_{-n-1} & u_{-n} \\ u_{-n} & u_{-n+1} \end{pmatrix}$, де n - довільне натуральне число.

Оскільки det A$^n \neq 0$, то матриця A^n має обернену:

$(A^n)^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} u_{n+1} & -u_n \\ -u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ та, за означенням оберненої матриці: $A^n \cdot (A^n)^{-1} = E$.

Оскільки обернена матриця подається однозначно, то $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Цю матрицю позначимо A^{-n}. Використовуючи рівності

$(A^{-1})^n = \begin{pmatrix} u_{-n-1} & u_{-n} \\ u_{-n} & u_{-n+1} \end{pmatrix}$, $(A^n)^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} u_{n+1} & -u_n \\ -u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$,

дістанемо: $u_{-n} = (-1)^n(-u_n) = (-1)^{n+1}u_n$, $n \in N$.

Наслідок: $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$ для $n \in Z$.

3) Доведемо, що $u_{m+n} + (-1)^n u_{m-n} = (u_{n+1} + u_{n-1})u_m$, $m, n \in Z$ [1].

Обчислимо $A^n + (-1)^n A^{-n}$.

Оскільки рівність $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$ виконується для $n \in Z$, маємо:

$$A^n + (-1)^n A^{-n} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_{n-1} & 0 \\ 0 & u_{n+1} + u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Домножимо обидві частини справа на матрицю A^m, де m - довільне ціле число. Маємо:

$$A^{n+m} + (-1)^n A^{m-n} = (u_{n+1} + u_{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} u_{m-1} & u_m \\ u_m & u_{m+1} \end{pmatrix} = (u_{n+1} + u_{n-1})A^m;$$

або, виконавши додавання в лівій частині, одержимо:

$$\begin{pmatrix} u_{m+n-1} + (-1)^n u_{m-n-1} & u_{m+n} + (-1)^n u_{m-n} \\ u_{m+n} + (-1)^n u_{m-n} & u_{m+n+1} + (-1)^n u_{m-n+1} \end{pmatrix} = (u_{n+1} + u_{n-1})\begin{pmatrix} u_{m-1} & u_m \\ u_m & u_{m+1} \end{pmatrix}.$$

З умови рівностей матриць дістанемо: $u_{m+n} + (-1)^n u_{m-n} = (u_{n+1} + u_{n-1})u_m$.

4) Доведемо, що u_{mn} ***ділиться на*** u_n, $m, n \in Z$ [1].

Використавши співвідношення $A^{2n} = (A^n)^2$, одержуємо

$$\begin{pmatrix} u_{2n-1} & u_{2n} \\ u_{2n} & u_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1}u_{n-1} + u_n u_n & u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} \\ u_n u_{n-1} + u_{n+1}u_n & u_n u_n + u_{n+1}u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Отже, $u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$.

Звідси випливає, що u_{2n} ділиться на u_n.

Аналогічно, з матричної рівності $(A^n)^m = A^{nm}$ випливає подільність u_{mn} на u_n $(n \neq 0)$.

5) Доведемо, що якщо d=НСД (r, s), то u_d - найбільший спільний дільник u_r і u_s [1].

Розглянемо матричну рівність: $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$.

Використаємо умову рівності двох матриць:

$$\begin{pmatrix} u_{n+m-1} & u_{n+m} \\ u_{n+m} & u_{n+m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1}u_{m-1} + u_n u_m & u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \\ u_n u_{m-1} + u_{n+1}u_m & u_n u_m + u_{n+1}u_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Отже, $u_{m+n} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$.

Якщо d=НСД (r, s), то, існують такі числа x і y, що $d=rx+sy$.

Звідси, на основі співвідношення $u_{m+n} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$, дістанемо:

$$u_d = u_{rx+sy} = u_{rx-1}u_{sy} + u_{rx}u_{sy+1}.$$

Нехай k - довільний спільний дільник u_r і u_s. Оскільки u_r ділиться на k, а u_{rx} - на u_r (за 4вл.), то u_{rx} ділиться на k. Аналогічно u_{sy} ділиться на k. З рівності $u_d = u_{rx+sy} = u_{rx-1}u_{sy} + u_{rx}u_{sy+1}$ випливає, що u_d ділиться на k. Крім того, u_d- спільний дільник u_r і u_s(за 4 вл.). За властивістю найбільшого спільного дільника двох чисел, маємо: u_d =НСД.

6) Доведемо, що коли u_n - просте число, $n \in N$, то n - також просте, або n =4 [1].

Серед перших членів послідовності Фібоначчі є кілька простих чисел: $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_7 = 13$, $u_{11} = 89$, $u_{13} = 233$.

Усі вони, крім u_4, мають прості індекси. І це не випадково.

Нехай n- складене, тобто $n = r \cdot s,\ 1 < r < n,\ 1 < s < n$. Тоді, на основі доведених властивостей, u_{rs} ділиться на u_r і на u_s. Відомо, що просте число u_n має тільки два дільники u_n і 1. Оскільки $u_r < u_n$, $u_s < u_n$, то $u_r = u_s = 1$. Серад чисел Фібоначчі з натуральними індексами тільки u_1 і u_2 дорівнюють 1. Але $r > 1, s > 1$. Тому $r = s = 2$, n=4.

Слід зазначити, що не всякому простому індексу n відповідає просте число Фібоначчі u_n. Справді $u_{17} = 2584$.

Отже, властивості чисел Фібоначчі можна довести нетрадиційним способом, використовуючи матриці другого порядку. Даний метод має свої переваги, а саме: є простішим в застосуванні, менш громістким та ефективнішим. Числа Фібоначчі володіють ще рядом властивостей, які можуть доводитись на основі матриць другого порядку. Це є завданням подальших досліджень.

Література

1.Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1969. – 112с.

2. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. - К.: Вища школа, 1969. – 536 с.